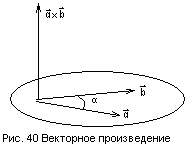
Задание № 12 Векторное и смешанное произведения векторов

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**Векторное произведение векторов**

Определение: *векторным произведением* вектора  на вектор  называется вектор , удовлетворяющий условиям:

1. Длина вектора  равна произведению длин векторов и на синус угла между ними: 
2. Линия действия вектора  перпендикулярна линиям действия векторов и 
3. Вектор  направлен так, что наблюдатель, смотрящий с конца вектора , видит поворот от вектора  к вектору на наименьший из двух возможных углов происходящим против часовой стрелки

**Теорема (свойства векторного произведения)**

Для любых векторов  имеют место тождества:

1)  (от перестановки множителей меняется знак произведения)

2) Для любого числа  верно: 

3) 

**Теорема (векторное произведение в координатах)**

Если  и , то 

*Замечание:* для запоминания и вычисления координат векторного произведения используют определитель

,

и его разложение по первой строке

 ,

т.е. коэффициенты при векторах  будут равны соответствующим координатам вектора .

**Теорема (двойное векторное произведение)**

Для любых векторов , ,  имеет место тождество 

***Пример:*** Даны векторы ; ; . Найти , , .

*Решение:* 1) , Значит, .

2) ;

3) . 

**Геометрические приложения векторного произведения**

1. Модуль векторного произведения двух векторов  и  равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах;
2. Если векторы  и  коллинеарны, то *условие коллинеарности в векторной форме* имеет вид 

***Пример:*** даны координаты вершин треугольника , , . Вычислить площадь треугольника .

*Решение:* площадь треугольника равна половине площади соответствующего параллелограмма, значит, . Найдем координаты векторов  и :

;

;

Вычислим координаты векторного произведения :

.

Найдем длину полученного вектора: .

Следовательно,  кв. ед.

**Смешанное произведение векторов**

**Определение:** *смешанным произведением* векторов , ,  называется скаляр, равный скалярному произведению вектора  на вектор .

Условные обозначения , , .

Основные свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не изменится, если поменять местами знаки скалярного и векторного умножений



2. При перестановке любых двух векторов смешанное произведение меняет свой знак



Если известны координаты векторов , , , то смешанное произведение векторов можно представить в виде

.

**Геометрические приложения смешанного произведения**

1. Модуль смешанного произведения  равен объему параллелепипеда, построенного на векторах  как на сторонах



Объем тетраэдра (треугольной пирамиды) равен .

2. Если векторы компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.

3. Если смешанное произведение , то векторы  образуют правую тройку; если , то – левую тройку.

4. Четыре точки , ,  и  лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда .

***Пример:*** Даны векторы , , . Найти объем параллелепипеда, построенного на этих векторах; определить ориентацию векторов .

*Решение:* .

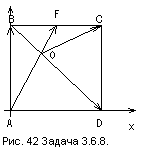
Объем параллелепипеда равен 51 кв. ед. Ориентация векторов – левая, т.к. 

***Пример:*** Проверить, образуют ли базу в пространстве векторы , , 

*Решение:* 

Векторы компланарны, значит, базу не образуют.

**Самостоятельная работа:**

**3.6.8.** На рис. 42 изображен квадрат ABCD со стороной 1. При этом 

BF=FC. Найти координаты векторных произведений , .

**3.6.9.** Дан куб .с длиной ребра равной 1. Чему равны векторные произведения , , , , , ?

**3.6.10** Длина вектора  равна 4, длина вектора  равна 5, угол между этими векторами равен .

а) Найти длины векторных произведений:и

;

б) Найти площадь треугольника, построенного на векторах 

и  как на сторонах;

**3.6.11.** В пространстве заданы четыре точки ; ; ; .

а) Найти векторное произведение 

б) Найти вектор единичной длины, перпендикулярный к векторам  и;

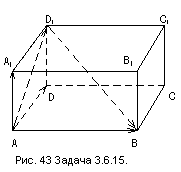
в) Найти векторные произведения  и  прямым вычислением;

г) Найти векторные произведения  и 

переходом к скалярному;

**3.6.12** Даны три точки ; ;  на плоскости. Найти .

**3.6.13.** Пользуясь формулой, связывающей двойное векторное произведение со скалярным произведением: , вывести формулы для векторных произведений:

 а) ; б) ; в) ;

**3.6.14.** Длина вектора  равна 4, длина вектора  равна 5, угол между этими векторами равен , вектор  длины 3 перпендикулярен каждому из векторов  и . Чему может быть равно смешанное произведение ?

**3.6.15.** На рис. 43 изображен прямоугольный параллелепипед , в котором . Найти смешанные произведения , , 

**3.6.16** Найти объем пирамиды с вершинами , ; ; .

**3.6.17.** При каком значении параметра  векторы , ,  будут компланарны?

**Ответы:**

**3.6.8.** , ;

**3.6.9.** , , , , , ;

**3.6.10.** а), ; б) 5;

**3.6.11.** а) ; б)  или ;

в), г) , ;

**3.6.12.** ; **3.6.13.** а) ;

б); в) ;

**3.6.14.** ; **3.6.15.** , , ; **3.6.16** ;. **3.6.17.** ;